TECHNION – ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 HAIFA, ISRAEL

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

בס"ד, יום שני, כ"ב בשבט, תשפ"ו

9.2.26

מבחן בחדו"א 1מ1 – 104041 – חורף תשפ"ו – 2026 – מועד א'

- משך הבחינה שלוש שעות.
- יש לכתוב בעט שחור או כחול בלבד.
- אסור להשתמש בחומר עזר
- במבחן שני חלקים. חלק ראשון שמכיל שאלות פתוחות, חלק שני שאלות רב בררתיות ("אמריקאיות").
- בחלק של השאלות הפתוחות יש לנמק היטב כל צעד
- את כל התשובות יש לכתוב בגוף השאלון.
- סך כל הנקודות במבחן הוא 101 אבל אפשר לקבל לכל היותר 100 נקודות.

שאלה 1 (27 נק')

א. (5 נק') נסחו את משפט לגרנז'

ראו ברשימות הקורס

ב. (12 נק') הראו כי $2x \le (x+2)\ln(1+x) \le (x+2)x$ לכל $0 \le x$

אי-השוויון שקול למעשה לאי-השוויון

$$\frac{2x}{(x+2)} \le \ln(1+x) \le x \text{ לכל } 0 \le x$$

נסמן $f(x) = x - \ln(1+x)$ אזי $f(0) = 0$ ו- $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \ge 0$ לכל $0 \le x$ ולכן לפי מסקנות לגרנז' $f(x)$ עולה ומכאן

$f(x) \ge 0$ כלומר $\ln(1+x) \le x$ לכל $0 \le x$

כעת, נסמן $g(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{(x+2)}$ אזי $g(0) = 0$ ו-

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 4(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+2)^2} \ge 0$$

ולכן לפי מסקנות לגרנז' $g(x)$ עולה ומכאן כי $g(x) \ge 0$ לכל $0 \le x$

ג. (10 נק') הראו כי $2 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x)+2) ln(1+\sin(x))dx < 3$

הערה. ניתן להשתמש בתוצאה של סעיף ב. גם אם לא הוכחתם אותה

לפי סעיף קודם ומשפט שלמדנו בכיתה

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x)+2) ln(1+\sin(x))dx$$
$$< \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x)+2)\sin(x) < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin(x) = 3$$

מאידך, לפי סעיף קודם (שימו לב שבתחום הנ"ל של האינטגרל $\sin(x)$ אי-שלילית) ומשפט שלמדנו בכיתה

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin(x)+2)ln(1+\sin(x))dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}}2\text{sinx} \geq 2$$

<u>שאלה 2 (25 נקודת)</u>

א. (5 נק') נסחו את משפט ערך הביניים

ראו ברשימות הקורס

ב. (10 נק') מצאו את מספר השורשים של הפונקציה

$f(x) = 2x^2 + xarctan(x) + tan(x^2) + cos(2x) - 2$ בקטע $(-1,1)$

פתרון. הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$ כיוון שהיא פונקציה אלמנטרית המוגדרת בקטע כלומר תנאי משפט ערך הביניים מתקיימים לכל קטע סגור שמוכל ממש בקטע. כמו כן הפונקציה $f(x)$ זוגית ולכן מספיק להסתכל בקטע $[0,1)$ בקטע זה מתקיים

$$f(0) < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8} + arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) + tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 = \frac{\pi^2}{8} + 1 - 2 + arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$$

לכן בקטע יש לפונקציה לפחות שורש אחד. מאידך בקטע $(0,1)$

$$4x + \frac{x}{x^2+1} + arctanx + \frac{2x}{\cos(x^2)} - 2sin2x$$
$$= 2(2x - \sin(2x)) + \frac{x}{x^2+1} + arctanx + \frac{2x}{\cos(x^2)} > 0$$

בקטע הנתון ($sinx < x$ לכל x חיובי) ולכן לפונקציה יש בדיוק שורש אחד בקטע $(0,1)$ ושניים בדיוק בקטע הנתון

ג. (10 נקודות) חשבו את $\int_0^1(xarctan(x) - tan(x))dx$

נפתור ע"י אינטגרציה בחלקים

$$\int_0^1 (xarctan(x) - tan(x))dx$$
$$= \int_0^1 xarctan(x)dx - \int_0^1 tan(x)\,dx$$

נחשב את $\int_0^1 xarctan(x)dx$

ע"י אינטגרציה בחלקים נקבל כי

$$u = arctanx \quad v' = x$$
$$u' = \frac{1}{x^2+1} \quad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^1 xarctan(x)dx = \frac{x^2}{2}arctanx|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x^2+1)}dx$$
$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left((x - arctanx)|_0^1\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

כמו כן

$$\int_0^1 tan(x)\,dx = -\,ln(\cos(x))|_0^1 = -\ln|\cos(1)|$$

ובסה"כ

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \ln|\cos(1)|$$

חלק שני רב ברירתי – "אמריקאי" (49 נקודות)

שאלה 1 (7 נק')

הגבול $\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{sinx}^{x} tsin\,(1+sin(t))dt}{x^2}$ הוא

א. 0

ב. 1

ג. $-\infty$

ד. ∞

ה. לא קיים

שאלה 2 (7 נק')

נתונים האינטגרלים המוכללים הבאים

$I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)+2}{x+ln(1+x)}dx \qquad II = \int_0^\infty \frac{arctan\,(1+x)}{x\left(ln\left(1+ln^3(1+x)\right)\right)}dx$ אזי

א. שניהם מתכנסים

ב. שניהם מתבדרים

ג. I מתכנס II מתבדר

ד. II מתכנס I מתבדר

שאלה 3 (7 נק')

נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tan\left(\frac{1}{n}\right)\right)(x-2)^n$ מתכנס עבור ה-x -ים הבאים

א. $1 \le x \le 3$ **ב.** $1 \le x < 3$ ג. $1 < x \le 3$ ד. $-\infty < x < \infty$ *ה.* $1 < x < 3$

שאלה 4 (7 נק')

ערך האינטגרל $\int_{e}^{e^4}\frac{lnxdx}{x(ln^{0.5}(x))}$

א.0 ב.$1\frac{2}{3}$ ג. $2\frac{2}{3}$ ד. $3\frac{2}{3}$ **ה.** $4\frac{2}{3}$

שאלה 5 (7 נק')

סכום הערך המקסימלי והמינימלי של הפונקציה

$f(x) = x|2x+4| - (x-1)|2x+1|$ בקטע $[-2,2]$

א. מספר שלם

ב. מספר רציונלי חיובי שאיננו שלם

ג. מספר רציונלי שלילי שאיננו שלם

ד. מספר אי-רציונלי חיובי

ה. מספר אי-רציונלי שלילי

שאלה 6 (7 נק')

מספר השורשים של הפולינום $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$ הוא

א. 0

ב. 1

ג. 2

ד. 3
ה. 4

שאלה 7 (7 נק')

חיים רצה לחשב קירוב של $ln2$ באמצעות פולינום טיילור עם שגיאה $R_n < \frac{1}{10}$. מהו n המינימלי עבורו תתקבל שגיאה זו?

א. 1
ב. 3
ג. 6
ד. 9
ה. 12

דף ריק במידת הצורך

בהצלחה!